CBS

Colegio Bautista Shalom

Matemática III
Básicos PFS
Tercer Semestre

Contenidos

FACTORIZACIÓN

- ✓ CASO FACTOR COMÚN MONOMIO.
- ✓ CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.
- ✓ CASO DIFERENCIA DE CUADRADOS.
- ✓ CASO TRINOMIO DE LA FORMA $AX^2 + BX + C$.
- ✓ CASO CUBO PERFECTO BINOMIOS (CUATRINOMIO).
- ✓ CASO SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS.

BINOMIO DE NEWTON

TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

NOTA: conforme vayas avanzando en el aprendizaje de cada uno de los temas, encontrarás ejercicios. Copia en hojas aparte cada uno para resolverlos. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

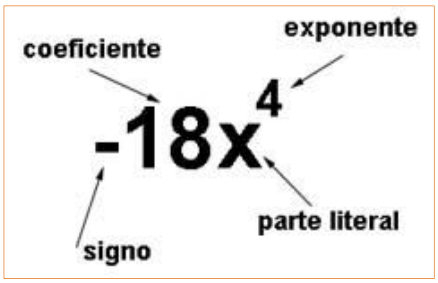
FACTORIZACIÓN

Es el procedimiento algebraico de encontrar dos o más factores cuyo producto es igual al monomio o polinomio expuesto. Las expresiones algebraicas en las que puedes factorizar son: monomios y polinomios (en su forma general).

MONOMIOS

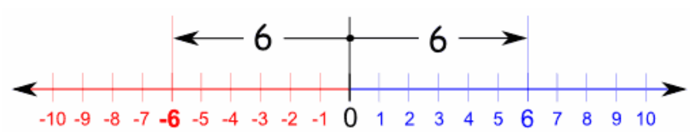
Son expresiones algebraicas formadas por una parte literal elevada a un exponente natural (o el producto de estas potencias) y una parte numérica o coeficiente. Es considerado también, como un monomio a la expresión que contenga únicamente parte numérica o coeficiente.

Sus partes son:



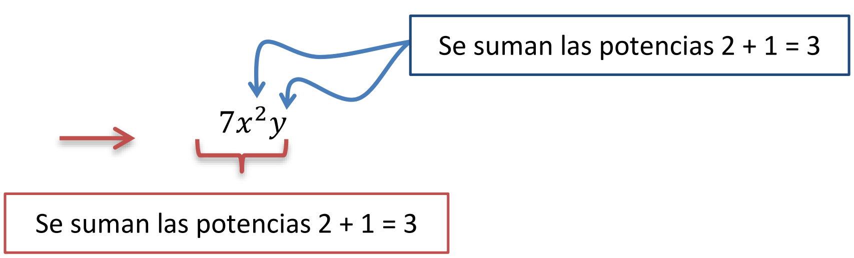
> **RECORDATORIO**
>
> Para entender la factorización es necesario conocer lo siguiente:
>
> - Cualquier expresión que contenga el signo de relación de igualdad es llamada ecuación. Este signo es "=".
> - Una ecuación es llamada identidad, en caso la igualdad se cumpla para cualquier valor de las variables que contenga la expresión; si la ecuación se cumple para determinados de las variables y no para otros, la ecuación es de tipo condicional.
> - La expresión algebraica que contiene solamente productos entre constantes numéricas y literales separados por medio de signos de suma o resta, es llamada término. La parte numérica del término se llama coeficiente.

En caso el signo sea positivo "+" este no se coloca, ya que el <u>valor absoluto</u> de las expresiones siempre será positivo.

> <u>Valor Absoluto</u>: el valor absoluto es la distancia en la recta numérica entre un número entero respecto al cero.
>
> 
>
>
> "6" está a 6 de cero, y "-6" **también** está a 6 de cero.
>
> Así que el valor absoluto de 6 es **6**, y el valor absoluto de -6 también es **6**

Grado de un Monomio: el grado de un monomio es igual a la suma de los exponentes (en cada una de sus literales) que estén dentro de la expresión algebraica. Por ejemplo:

$$7x^2y \quad es\ de\ grado\ tres.$$



La expresión anterior equivale a:

$$7 \cdot x^2 \cdot y$$

Y la suma de los exponentes es: 2 + 1 = 3.

$$\boldsymbol{x} \; tiene\ grado\ \mathbf{2} \;/\; \boldsymbol{y}\ tiene\ grado\ \mathbf{1}$$

EJERCICIO 01: determina el grado de cada uno de los monomios que se te presentan a continuación, escribiendo tu respuesta en el subrayado. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $15mn^2$ ____________________ **2.** $16x^3y^4$ ____________________ **3.** $30v^2w^4$ ____________________

4. $22xyx$ ____________________ **5.** $36s^6$ ____________________ **6.** $49abc$ ____________________

7. $62a^3b^6c^9$ ____________________ **8.** $7xyz$ ____________________ **9.** uvw ____________________

10. $150x^2y^3$ ____________________ **11.** $36h$ ____________________ **12.** $48k^{10}$ ____________________

13. $27l^3$ ____________________ **14.** $8y^3$ ____________________ **15.** $60w^6$ ____________________

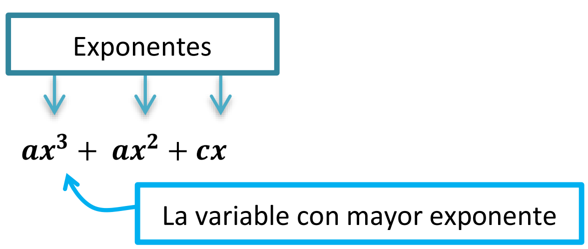
POLINOMIO

Es la expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos o monomios. Se denomina a la suma de varios monomios, llamados términos del polinomio. En este caso cada uno de los términos del polinomio son monomios en una misma expresión algebraica.

Es una expresión algebraica constituida por una o más variables, utilizando solamente operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

El grado de un polinomio lo determina el número de mayor exponente de las variables que este tenga.

Por ejemplo:



Si el mayor exponente de la variable "x" es 3, el polinomio es de **tercer grado**.

EJERCICIO 02: determina el grado de cada uno de los polinomios que se le presentan a continuación, escribiendo su tipo en la parte derecha. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático/a te indicará.*

1. $20x - 60x^2 - 30y^6$ ____________________ **2.** $7m^3n + 14\,m^2n^3 - 21mn^7$ ____________________

3. $55pq + 75pq^5$ ____________________ **4.** $30m^4 - 6\,m^2 - m$ ____________________

5. $20xyz - 60xyz^3 - 30xyz^5$ ____________________ **6.** $9u^2 + 18u^5 - 6u^3 + 3u - 2$ ____________________

7. $30mn - 15mn^2 - 30mn^3$ ____________________ **8.** $5v^7 + 50v^5 - 45v^9 + 75$ ____________________

9. $11yz - 22yz^4 - 33yz^7$ ____________________ **10.** $b^2 + 18b^5 - 9b^3 + 3b - 3$ ____________________

La factorización puede considerarse como la operación inversa a la multiplicación, pues el propósito de ésta última es hallar el producto de dos o más factores; mientras que en la factorización, se buscan los factores de un producto dado. Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica, a los términos que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión.

Factorización

$$\longrightarrow$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$24 = 4 \cdot 6$$
$$24 = 8 \cdot 3$$
$$24 = 12 \cdot 2$$

$$\longleftarrow$$

Multiplicación

Al factorizar una expresión, la escribimos como un producto de sus factores. Suponiendo que tenemos dos números 4 y 7. En este caso, te solicitan sean multiplicados:

$$4 \times 7 = 28$$

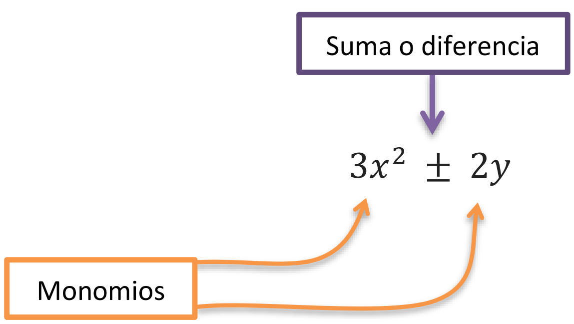
Durante el procedimiento, tenemos un producto de 28 y se nos pide que lo factoricemos; entonces tendremos

$$28 = 4 \times 7$$

Dentro de los polinomios podemos encontrar expresiones algebraicas que, conforme a la cantidad de monomios que contenga se les clasifica:

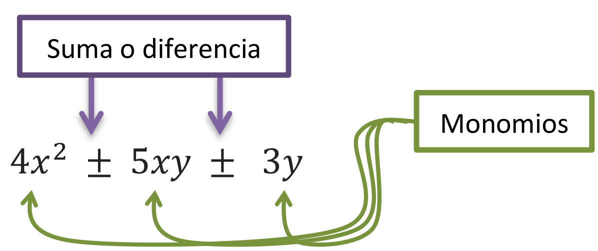
BINOMIO

Expresión algebraica que contiene una suma o diferencia de dos monomios.



TRINOMIO

Expresión algebraica que contiene tres monomios y entre estos existe una suma o diferencia.



EJERCICIO 03: determina el tipo de expresión algebraica que se te presentan a continuación, escribiendo su tipo en la parte derecha. *De la misma forma debes realiza los 20 ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $4x^5y + 5xy - 15x^3y^2$ ________________

2 . $9mn$ ________________

3. $10a^2b^3 - 12abc + 15a^5b^2c^3$ ________________

4. $10m^4n + 15\,m^3n - 5mn^2$ ________________

5. $12w + 12v$ ________________

6. xyz ________________

7. $7g + 35h - 14gh$ ________________

8. $10xyz - 20\,xyz$ ________________

9. $x^3yz + 2xy^4z^5 - 4x^3y^2z$ ________________

10. $10uv$ ________________

CASO FACTOR COMÚN MONOMIO

Definición: es el factor que está presente en cada uno de los términos del polinomio.

En este caso el factor común es sólo el coeficiente, ya que no hay literal que esté presente en todos los monomios. El coeficiente 4 es la cantidad más pequeña y en esta pueden ser divididos los demás coeficientes.

$$8a - 4b + 16c + 12d =$$
$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

Explicación:

Se saca el número 4 y se coloca multiplicando al paréntesis. A eso se le dice "sacar factor común 4". Luego, se divide cada término por el número 4, y se colocan todos los resultados dentro del paréntesis, sumando o restando según el signo que resulte de la división.

¿Por qué el número 4? Los números 8, 4, 16 y 12, son divisibles 4. Como en todos los términos hay números divisibles por 4, se dice que "hay factor común 4".

8 es igual a **4** x 2
4 es igual a **4** x 1
16 es igual a **4** x 4
12 es igual a **4** x 3

Como el número 4 está multiplicando en todos los términos, es un "factor común".

Primer término:

$$\frac{8a}{4} = 2a$$

este término resultó "positivo"

Segundo término:

$$\frac{-4b}{4} = -b$$

este término resultó "negativo"

Tercer término:

$$\frac{16c}{4} = 4c$$

Cuarto término:

$$\frac{12d}{4} = 3d$$

Es así, como obtienes cada uno de los términos de la solución:

$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

Encontrar el factor común 4 significa "dividir a todos los términos por 4". Al realizar esta división entre un número positivo, los términos resultaron con el mismo signo que ya tenían. Esto por la ley de signos.

Verificación de la Factorización de la Expresión Algebraica

Se realiza la distributiva en el resultado. En palabras más simples, debes de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta. Esto te dará como resultado la expresión algebraica original.

En el polinomio ya factorizado:

$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

$$4 \times 2a = 8a$$
$$4 \times (-b) = -4b$$
$$4 \times 4c = 16c$$
$$4 \times 3d = 12d$$

El resultado será:

$$8a - 4b + 16c + 12d$$

Estos son los 4 términos que tenía en el polinomio original, con los signos correctos, entonces está bien factorizado: las dos expresiones son equivalentes.

Ahora, no sólo son divisibles por 4, sino también por 2, y hasta por 1. En este caso es necesario sacar el **mayor** número posible que divida a todos los términos, y ese número es el 4. Es el llamado Máximo Común Divisor (M.C.D o D.C.M).

Si no podemos darnos cuenta a simple vista de cuál es ese número, entonces podemos usar la regla del D.C.M para calcularlo. Es decir que el "factor común" que nos piden sacar entre varios números es su Máximo Común Divisor. Para mayor comprensión, este ejemplo:

$$9x^3 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 =$$
$$3x^2\,(3x - 2 + 4x^3 - 6x^5)$$

Solución:

Se saca el factor común $3x^2$. Ya que, el factor común entre los números es 3, y entre las letras es x^2, ya que es la x con el menor exponente con que aparece en el polinomio.

Se divide cada término por $3x^2$, recordando que para dividir las letras hay que restar los exponentes. Aplicando la propiedad de división de potencias de igual base.

Primer término:

$$\frac{9x^3}{3x^2} = 3x$$

"9 dividido 3 da como resultado 3""Por el lado de los números"
"x^3 dividido x^2 = x^{3-2} = x^1 = x " "Por el lado de las letras".

Segundo Término:

$$\frac{-6x^2}{3x^2} = -2$$

"-6 dividido 3 resulta -2"
"x^2 dividido x^2 resulta 1"

Tercer Término:

$$\frac{12x^5}{3x^2} = 4x^3$$

"12 dividido 3 resulta 4"
"x^5 dividido x^2 resulta x^3"

Cuarto Término:

RECORDATORIO:

Encontrando el M.C.D.:

18 – 12 – 6 – 9	3
6 – 4 – 2 – 3	
Divisibles en 2	Divisible en 3

Hasta acá se queda porque uno de los coeficientes no es divisible en el número 2, el cual divide al resto de número. Por tanto, el M.C.D es el 3.

$$\frac{-18x^4}{3x^2} = -6x^2$$

" -18 dividido 3 resulta -6 "
" x^4 dividido x^2 resulta x^2"

El número 3 es factor común, ya que el número 3 divide exactamente a 9, 6, 12 y 18. Es el Máximo Común Divisor (MCD o DCM) entre ellos.

Y la "x" está en todos los términos. Entonces es también factor común la x con el menor exponente con que aparece, es decir: x^2. El factor común es entonces $3x^2$.

EJERCICIO 04: a continuación se te presentan casos de factorización por factor común monomio, en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $a^2 + 2a$	**2.** $10b - 30ab^2$	**3.** $10a^2 + 5a + 15a^3$
4. $a^2 + ab$	**5.** $b + b^2$	**6.** $x^2 + x$ **7.** $3a^3 - a^2$
7. $3a^3 - a^2$	**8.** $x^3 - 4x^2$	**9**. $5m^2 + 15m^3$
10. $ab - bc$	**11.** $8m^2 - 12mn$	**12.** $15c^3 3d^2 + 60c^2 2d^3$
13. $a^3 + a^2 + a$	**14.** $15y^3 + 20y^2 - 5y$	**15.** $2u^2 - u$

CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Es el trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Su denotación es:

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Es un trinomio cuadrado perfecto; si el primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta (de su literal como del coeficiente) y el término de en medio (segundo término) es el doble del resultado de la multiplicación entre la raíz cuadrada del primer y tercer término.

Por ejemplo:

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4$$

$$\sqrt{36x^2} + 12xy^2 + \sqrt{y^4}$$

$$6x \qquad\qquad y^2$$

$$2 \times (6x)(y^2)$$

$$12xy^2$$

Comprobando que el doble del resultado de la multiplicación entre las raíz cuadrada del primer como del tercer término, es el término de en medio (o segundo término) del polinomio original. Se coloca entre paréntesis la suma de estos y se elevan al cuadrado. Esta será la factorización del polinomio original:

$$(6x + y^2)^2$$

La combinación de signos (en este caso) es según la ley de signos.

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4 = (6x + y^2)^2$$

$$+ \; por + = +$$

En el trinomio cuadrado perfecto los términos cuadrados son siempre positivos, en cambio el término del doble producto puede ser negativo; en este caso debe ser negativo uno de los términos del binomio cuyo cuadrado es el trinomio dado, del ejemplo anterior tenemos:

$$(6x - y^2)^2 = (6x - y^2)(6x - y^2)$$
$$= (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ó también así:

$$(y^2 - 6x)^2 = (y^2 - 6x)(y^2 - 6x)$$
$$= (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ambas son respuestas aceptables.

Identificar si un Trinomio es Cuadrado Perfecto

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando la primera y tercer letra son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y son positivos y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Por ejemplo:

$$25 + 10xy + x^2y^2 = (5 + xy)^2$$
$$1 + a^{10} - 2^{a5} = (1 - a^5)^2$$
$$225x^4 + 25m^2n^4 - 150x^2mn^2 = (15x^2 + 5mn^2)^2$$

EJERCICIO 05: a continuación se te presentan casos de factorización de la forma trinomio cuadrado perfecto, en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático/a te indicará.*

1. $a^2 - 2ab + b^2$ **2.** $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$ **3.** $9b^2 - 30ab + 25a^2$ **4.** $b^2 - 12b + 36$

5. $25x^2 + 70xy + 49y^2$ **6.** $x^2 + 10x + 25$ **7.** $4a^2 + 4a + 1$ **8.** $1 + 6a + 9a^2$

9. $16m^2 - 40mn + 25n^2$ **10.** $25a^2c^2 + 20acd + 4d^2$

CASO DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede sacar raíz cuadrada exacta. Al estudiar tener en mente los productos notables, teníamos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En donde el resultado es una diferencia de cuadrados, para este capítulo es el caso contrario:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Procedimiento:

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Básicamente se escriben así:

(a + b)(a – b)

Si los multiplicamos queda:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Entonces el producto notable es:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Se lee: la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

- ✓ Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.
- ✓ Se multiplica la suma por la diferencia de estas cantidades (el segundo término del binomio negativo es la raíz del término del binomio que es negativo).

Factorizar $x^2 - y^2$ raíces: $\sqrt{x^2} = x$ $\sqrt{y^2} = y$ respuesta: $(x + y)(x - y)$

Ejemplos:

$$16m^2 - 9n^2 = (4m + 3n)(4m - 3n)$$

$$y^2 - (9(x-1)^2 = [y + 3(x-1)][y - 3(x-1)] = (y + 3x - 3)(y - 3x + 3)$$

$$49(m+n)^2 - 144(m-n)^2 = [7(m+n)+12(m-n)][7(m+n)-12(m-n)] = (19m - 5n)(19n - 5m)$$

Caso Especial:

$$a^2 + 2a(a-b) + (a+b)^2$$

Raíz cuadrada de:

$$a^2 = a$$

Raíz cuadrada de:

$$(a-b)^2 = (a-b)$$

Doble producto sus raíces:

$$(2 \times a \times (a-b) = 2a(a-b)$$

La expresión anterior cumple, entonces:

$$[(a + (a-b)]^2$$

$$(a + a - b) = (2a - b)^2$$

EJERCICIO 06: a continuación se te presentan casos de factorización diferencia de cuadrados, en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $(1-a)^2$ **2.** $16x^2 - 25y^4$ **3.** $49x^2y^6z^{10} - a^{12}$ **4.** $a^{2n} - 9b^{4m}$ **5.** $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$

6. $9a^2 - 25b^2$ **7.** $4x^2 - 1$ **8.** $3x^2 - 12$ **9.** $8y^2 - 18$ **10.** $16x^2 - 100$

CASO TRINOMIO DE LA FORMA AX² +BX + C

Este tipo de trinomio se diferencia del anterior debido a que el termino al cuadrado se encuentra precedido por un coeficiente diferente de uno (debe ser positivo). Este se trabaja de otra forma que se describe en el siguiente procedimiento:

Factorizar $3m^2 + 8m + 5$

1^er^ paso $3(3m^2 + 8m + 5) = (3m)^2 + 8(3m) + 15$

2° paso $(3m \quad)(3m \quad)$

3er paso $\dfrac{(3m \quad)(3m \quad)}{3}$

4° paso $\dfrac{(3m+ \quad)(3m+ \quad)}{3}$

5° paso $\dfrac{(3m+3)(3m+5)}{3}$

Simplificar $(m+1)(3m+5)$

Caso Especial:

$$6x^4 + 5x^2 - 6$$

$$(6)\ 6x^4 + (6)5x^2 - (6)6 =$$

$$36x^2 + (6)5x^2 - 36 =$$

$$\frac{(6x^2 + 9)(6x^2 - 4)}{3 \times 2} =$$

$$(2x^2 + 3)(3x^2 - 2)$$

Siempre que sea posible hay que realizar la división indicada que nos queda de este tipo de trinomio, sin olvidar que cada factor del denominador que se simplifique se corresponde a todos los términos de uno solo de los binomios.

EJERCICIO 07: a continuación se te presentan casos de Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$ en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los 20 ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $2x^2 + 3x - 2$	**2.** $15m^2 + 16m - 15$	**3.** $30x^2 + 13x - 10$
4. $6m^2 - 13am - 15a^2$	**5.** $18a^2 + 17ay - 15y^2$	**6.** $20x^2 + 7x - 6$
7. $18a^2 - 13a - 5$	**8.** $6x^2 - 7x - 3$	**9.** $20x^2 + 7x - 6$
10. $2x^2 + 3x - 2$		

CASO CUBO PERFECTO BINOMIOS (CUATRINOMIO)

Recordando el tema de productos notables, en donde tenemos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

En este caso la factorización es realizar la operación inversa a esta:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

Para reconocerlo se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

Debe tener cuatro términos, y estar ordenado con respecto a una letra.

Dos de sus términos, el 1º (a^3) y el 4º (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.

El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto termino [$3(a)^2(b)$].

El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto termino [$3(a)(b)^3$].

El segundo y el cuarto termino deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).

Si todos los términos son positivos el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, si hay términos negativos el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a – b)^3$.

Ejemplo explicativo:

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6 - 54a^2b^2 + 36ab^4$
Ordenamos	$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$
Raíces	$27a^3 = 3a \qquad 8b^6 = 2b^2$
Productos	$3(3a)^2(2b^2) = 54a^2b^2 \qquad 3(3a)(2b^2)^2 = 36ab^2$
Resultado	$(3a - 2b^2)^3$

Ejemplos:

$$m^3 + 15m^2 + 75m + 125 \qquad = (m+5)^3$$

$$216x^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3 \qquad = (6x - 7y^2z)^3$$

$$-8z^3 + 36z^2y - 54zy^2 + 27y^3 \quad = -1(8z^3 - 36z^2y + 54zy^2 - 27y^3) \qquad = -1(2z - 3y)^3$$

En este tipo de factoreo, se trata de reconocer que pertenece a este tipo polinomio.

EJERCICIO 08: a continuación se te presentan casos de cuatrinomio en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los 20 ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

2. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

3. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

4. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$

5. $216^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3$

6. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

7. $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$

8. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

9. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$

10. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

CASO SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

En este caso de factorización es importante que tengas la noción de lo que son productos notables:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Pero en la división exacta el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, efectuándolo nos queda:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

De donde se deducen las siguientes reglas:

- ✓ La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.
- ✓ La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Procedimiento

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6$		
Raíces	$27a^3 = 3a$	$8b^6 = 2b^2$	
Productos	$(3a)^2 = 9a^2$	$(3a)(2b^2) = 6ab^2$	$(2b^2)^2 = 4b^4$
Resultado	$(3a - 2b^2)(9a^2 + 6ab^2 + 4b^4)$		

Caso Especial

$$1 + (x + y)^3$$
$$[1 + (x + y)(1^2 - 1(x + y) + (x + y)^2]$$
$$(1 + x + y)(1 - (x + y) + (x + y)^2)$$
$$(1 + x + y)(1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2)$$

EJERCICIO 09: a continuación se te presentan caso suma o diferencia de cubos en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno. *De la misma forma debes realiza los ejercicios que tu catedrático(a) te indicará.*

1. $1 + a^3$	**2.** $x^3 - 27$	**3.** $x^6 - 8y^{12}$
4. $(m-2)^3 + (m-3)^3$	**5.** $(x-y)^3 - 8$	**6.** $a^3 + b^3$
7. $a^3 - b^3$	**8.** $1 - a^3$	**9.** $x^3 + y^3$
10. $64 + a^6$		

BINOMIO DE NEWTON

El binomio de Newton es un algoritmo que permite calcular una potencia cualquiera de un binomio, para ello se emplean los coeficientes binomiales, que no son más que una sucesión de números combinatorios.

La fórmula general del binomio de Newton dice:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$\binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Los números combinatorios que aparecen en la fórmula son precisamente los llamados coeficientes binomiales.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 = & \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4 \\ = & a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

En el caso en que en el binomio figure un signo menos, los signos del desarrollo deben irse alternando de la forma $+ \; - \; + \; - \; + \; - \; \ldots$

Para una mayor comprensión de lo que es el Binomio de Newton, deduzcamos la fórmula que nos permitirá elevar a cualquier potencia de exponente natural, n, un binomio.

Esto es la forma de obtener:

$$(a + b)^n$$

Para ello veamos cómo se van desarrollando las potencias de (a + b)

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observando los coeficientes de cada polinomio resultante vemos que siguen esta secuencia

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Esto es el triángulo de Tartaglia que se obtiene escribiendo en filas los números combinatorios desde los de numerador 1.

Es decir, que cada uno de esos números corresponde al valor de un número combinatorio así:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Podemos observar que cada fila empieza y termina por 1, que los números que aparecen forman una fila simétrica, o sea el primero es igual al último, el segundo igual al penúltimo, etc., y cada número es la suma de los dos que tiene encima.

Por otra parte en cualquier momento podemos hallar el valor de un número combinatorio cualquiera recordando que se calculan por la siguiente fórmula:

$$\binom{m}{n} = \frac{m.(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{n!}$$

Por ejemplo si quiero calcular:

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Por otra parte, observando las potencias de *(a + b)* de nuevo vemos que las potencias de *a* empiezan elevadas a n, va disminuyendo uno a uno hasta llegar a cero. A los exponentes de *b* les ocurre lo contrario.

Con lo que ya tenemos podemos calcular directamente la siguiente potencia de *(a+b)*, sus coeficientes serán la fila quinta del triángulo de Tartaglia.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Y ya podemos escribir la fórmula general (antes mencionada) del Binomio de Newton.

TRIÁNGULO DE PASCAL O DE TARTAGLIA

Pascal ideó una manera sencilla de calcular números combinatorios (aunque en algunos textos esta idea se atribuye a Tartaglia):

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El método recibe el nombre de triángulo de Pascal y se construye de la siguiente forma (por filas y de arriba a abajo):

- ✓ En el vértice se coloca un 1.
- ✓ Cada fila empieza y acaba en 1.
- ✓ Los otros números de la fila son siempre la suma de los dos que tiene justo encima.

Por ejemplo:

La última fila, por ejemplo, nos daría el valor de los números combinatorios consecutivos:

$$\binom{5}{0}, \quad \binom{5}{1}, \quad \binom{5}{2}, \quad \binom{5}{3}, \quad \binom{5}{4}, \quad \binom{5}{5}$$

El término general del desarrollo de $(a+b)^n$ viene dado por la fórmula:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Por ejemplo:

Según esto, en el primer ejemplo tendríamos que el tercer término sería (para $k = 2$ ya que la serie empieza siempre por $k = 0$):

$$\binom{4}{2} a^2b^2 = 6a^2b^2$$

Esta fórmula permite calcular el valor de un término cualquiera sin necesidad de efectuar todo el desarrollo.

Por ejemplo, para calcular el 20º término del desarrollo de $(x+y)^{30}$. Aplicando la fórmula: $\binom{30}{19}x^{30-19}y^{19}=54627300x^{11}y^{19}$

EJERCICIO 10: observa y estudia detenidamente los problemas resueltos, y continúa con resolver los demás. En tu cuaderno, desarrolla para cada solución el Triángulo de Tartaglia.

1) Desarrollar la potencia $(2x-3y)^{15}$

$$(2x-3y)^{15}=\binom{15}{0}(2x)^{15}+\binom{15}{1}(2x)^{14}(-3y)+\binom{15}{2}(2x)^{13}(-3y)^{2}+\ldots+\binom{15}{15}(-3y)^{15}$$

La fila 15 del triángulo de Tartaglia es: 1, 15, 105, 455, 1365, 3003, 5005, 6435, 6435, 5005, 3003, 1365, 455, 105, 15, 1

Que serán los valores de los coeficientes.

2) Calcular sin desarrollar el término que ocupara el lugar 50 en el desarrollo de:

$$\left(a+\frac{3}{b}\right)^{100}$$

El primer término tiene de coeficiente $\binom{100}{0}$, el segundo $\binom{100}{1}$, el tercero $\binom{100}{2}$, etc.

Por tanto el término de lugar 50 será:

$$T_{50}=\binom{100}{49}\left(a^{2}\right)^{51}\left(\frac{3}{b}\right)^{49}=98913082887808032681188722800.\ a^{102}.\frac{3^{49}}{b^{49}}=9{,}89.10^{28}.a^{102}.\frac{3^{49}}{b^{49}}$$

En general el término de lugar k+1 en el desarrollo de $(a+b)^{n}$ es:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}$$

3) Si el segundo término de un desarrollo de la potencia de un binomio es:

$$\binom{12}{1}.a^{11}.\left(\frac{1}{2}b\right)$$

¿Cuál es el término penúltimo? ¿Y cuál es el binomio y su potencia? El penúltimo término será el de lugar 12, pues habrá 13 términos y valen:

$$T_{12}=\binom{12}{11}.a.\left(\frac{1}{2}b\right)^{11}$$

El binomio y su potencia serán:

$$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^{12}$$

4) Hallar el término medio del desarrollo de:

$$\left(\sqrt{2}-3\sqrt{a}.b^2\right)^{14}$$

Como está elevado a 14 habrá 15 términos, por tanto el término que está en medio es el de lugar 8, tiene 7 por delante y 7 por detrás.

$$T_8=\binom{14}{7}.\left(\sqrt{2}\right)^7.\left(3\sqrt{a}.b^2\right)^7$$

Vamos a desarrollarlo:

$$T_8=\frac{14.13.12.11.10.9.8}{7.6.5.4.3.2}.2^3\sqrt{2}.3^7.a^3\sqrt{a}.b^{14}=3432.8.2187a^3b^{14}\sqrt{2a}=60046272a^3b^{14}\sqrt{2a}$$

5) Escribe el término que contiene x^{31} en el desarrollo de:

$$\left(\frac{2x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^{20}$$

El término de lugar k+1, como hemos dicho antes, tiene esta forma:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}\left(\frac{2x^2}{y}\right)^{20-k}\left(\frac{y^2}{x}\right)^k$$

Veamos cómo quedan las potencias *x* y de *y*:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}\frac{2^{20-k}x^{40-2k}}{y^{20-k}}.\frac{y^{2k}}{x^k}=(-1)^k\binom{20}{k}\frac{2^{20-k}x^{40-2k}y^{2k}}{y^{20-k}x^k}$$

Dividiendo las potencias de la misma base, restando los exponentes tenemos:

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{20}{k}2^{20-k}x^{40-3k}y^{3k-20}$$

Por tanto el exponente de x es 40-3k. Como queremos obtener x^{31}, basta igualar 40-3k=31, de donde k=3. Se trata por tanto del término de lugar 4.

Ahora escribimos el término completo.

$$T_4=(-1)^3\binom{20}{3}2^{17}x^{31}y^{-11}=-\frac{20.19.18}{3.2}131072x^{31}\frac{1}{y^{11}}=-\frac{149422080x^{31}}{y^{11}}$$

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

http://www.aulafacil.com/cursos/l10955/ciencia/matematicas/algebra/cubo-perfecto-de-binomios-cuatrinomio

http://www.sangakoo.com/es/temas/binomio-de-newton-y-triangulo-de-pascal

https://ejerciciosalgebra.wordpress.com/2012/09/13/caso-viii-cubo-perfecto-de-binomios/

https://ejerciciosalgebra.wordpress.com/2012/10/11/caso-ix-suma-o-diferencia-de-cubos-perfectos/